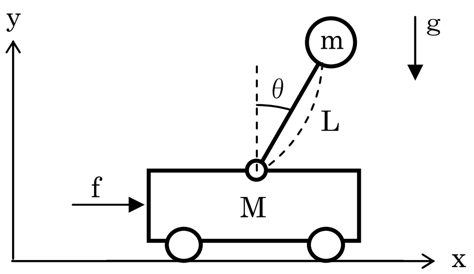
ソフトコンピューティング演習

第１回　倒立振り子の制御シミュレーション構築

講義用 HP：http://www.robot.t.u-tokyo.ac.jp/dcm/lec/softcomp.htm

［課題１］倒立振り子の運動方程式の導出

下図は倒立振り子と台車で構成されるシステムである．但し，振り子の棒の質量・慣性モーメントは考えないものとする．



m	：	おもりの質量
L	：	振り子の長さ
θ	：	振り子の角度
M	：	台車の質量
f	：	台車に加わる力
g	：	重力加速度

図１　倒立振り子システム

ラグランジュ法によりこのシステムの運動方程式を求める．このシステムのポテンシャルエネルギ U と運動エネルギ K は,

導出過程

$$U = mgL\cos\theta$$

$$K = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + 2L\dot{x}\cos\theta\cdot\dot{\theta} + L^2\dot{\theta}^2\right)$$

となる．ラグランジュ方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} = f \qquad \cdots\text{台車}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial K}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \qquad \cdots\text{振り子}$$

に代入すると，以下の運動方程式を得ることができる．

2008 年 11 月 28 日

導出過程

$$\left(M+m\right)\ddot{x}+mL\cos\theta\cdot\ddot{\theta}-mL\sin\theta\cdot\dot{\theta}^2=f$$
$$mL\cos\theta\cdot\ddot{x}+mL^2\ddot{\theta}-mgL\sin\theta=0$$

以上の 2 つの運動方程式を用いて角加速度およびお加速度を求めることができる.

導出過程

$$\ddot{\theta}=-\frac{\cos\theta}{L\left(M+m\sin^2\theta\right)}f+\frac{(m+M)\sin\theta}{L\left(M+m\sin^2\theta\right)}g-\frac{mL\sin\theta\cos\theta}{L\left(M+m\sin^2\theta\right)}\dot{\theta}^2$$
$$\ddot{x}=\frac{1}{M+m\sin^2\theta}f-\frac{m\sin\theta\cos\theta}{M+m\sin^2\theta}g+\frac{mL\sin\theta}{M+m\sin^2\theta}\dot{\theta}^2$$

以上の 2 式が倒立振り子の挙動を示す方程式となる.

［課題２］微分方程式の数値解法（オイラー法）

数値計算方法には，オイラー法，ルンゲ・クッタ法，差分法，有限要素法などがあり，物理現象を表現する方程式の種類や必要精度等に応じて使い分けられている．

その中でもオイラー法やルンゲ・クッタ法は，常微分方程式の数値解を求めるために広く利用されているため，本課題である倒立振り子の数値解析（シミュレーション）をオイラー法により解くものとする．オイラー法とは，常微分方程式が表している変化率と初期条件を利用し，次々に線形近似（差分近似）することにより解の値を決定していく方法である．この方法は，容易にプログラムできるという利点を持っているが，近似精度が低いため計算の刻み幅を十分小さくしないと精度の良い解が得られないという問題点がある．

[補足：オイラー数値解析の応用例]

物体の時間に対する位置変位（遷移）に関しての数値解析を説明する．手順としては，まず物体の運動方程式 f を導き，次にその運動方程式を離散的表現である漸化式で記述する必要がある．そして，この運動方程式（漸化式）と各変数の初期値を元とし，時間に対する物体の変位の近似を行う．つまり，運動方程式により物体の加速度（第一段階），差分方程式 1 により物体の速度（第二段階），差分方程式 2 により物体の位置（第三段階）を求め，これら三段階を繰り返すことにより，経過時間 t における位置変位 y が求まることとなる．

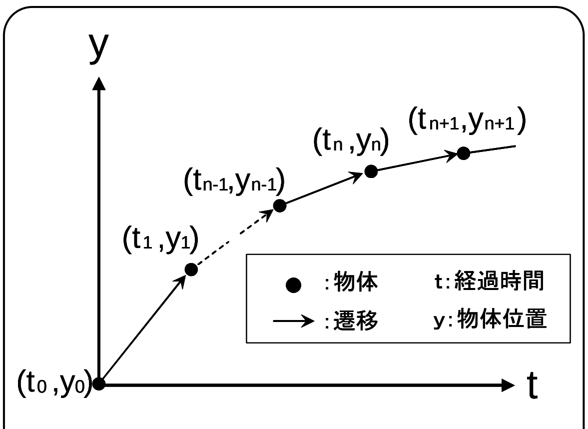
<u>漸化式</u>

計算の刻み幅　$t_n = t_{n-1} + dt \quad (n = 1, 2, \cdots)$

運動方程式：　$\ddot{y}_n = f\left(y_{n-1}, \dot{y}_{n-1}\right)$

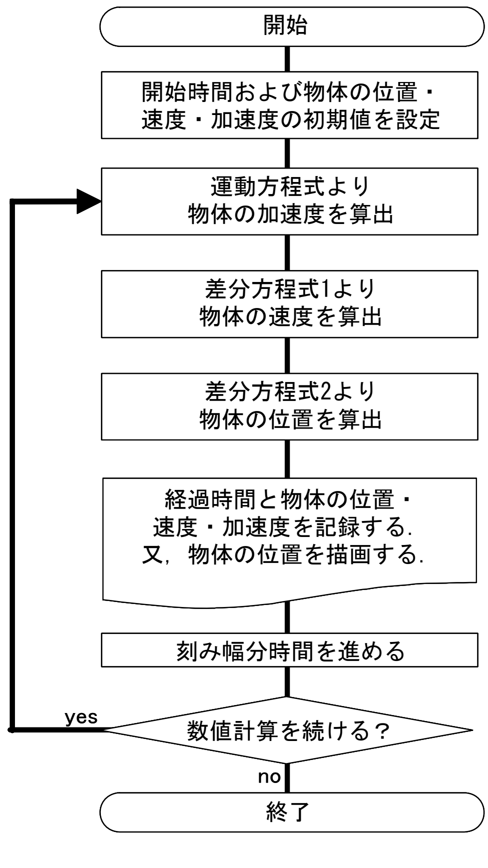
差分方程式1:　$\dot{y}_n = \dot{y}_{n-1} + \ddot{y}_n * dt$

差分方程式2:　$y_n = y_{n-1} + \dot{y}_n * dt$



物体の位置遷移の概念図

<u>フローチャート</u>



2008 年 11 月 28 日

先に示した補足を参考にして，倒立振り子シミュレーション（数値解析）を構成するために必要である漸化式およびフローチャートの空欄をうめて完成させよ．

(a) 漸化式の空欄：加速度と角加速度の運動方程式を漸化式として記述せよ．

(b) フローチャートの空欄：空欄に必要とされる処理を行う漸化式（方程式）を記述せよ．

<u>漸化式</u>

経過時間：　$t_n = t_{n-1} + dt$

運動方程式１：

差分方程式１：　$\dot{x}_n = \dot{x}_{n-1} + \ddot{x}_n * dt$

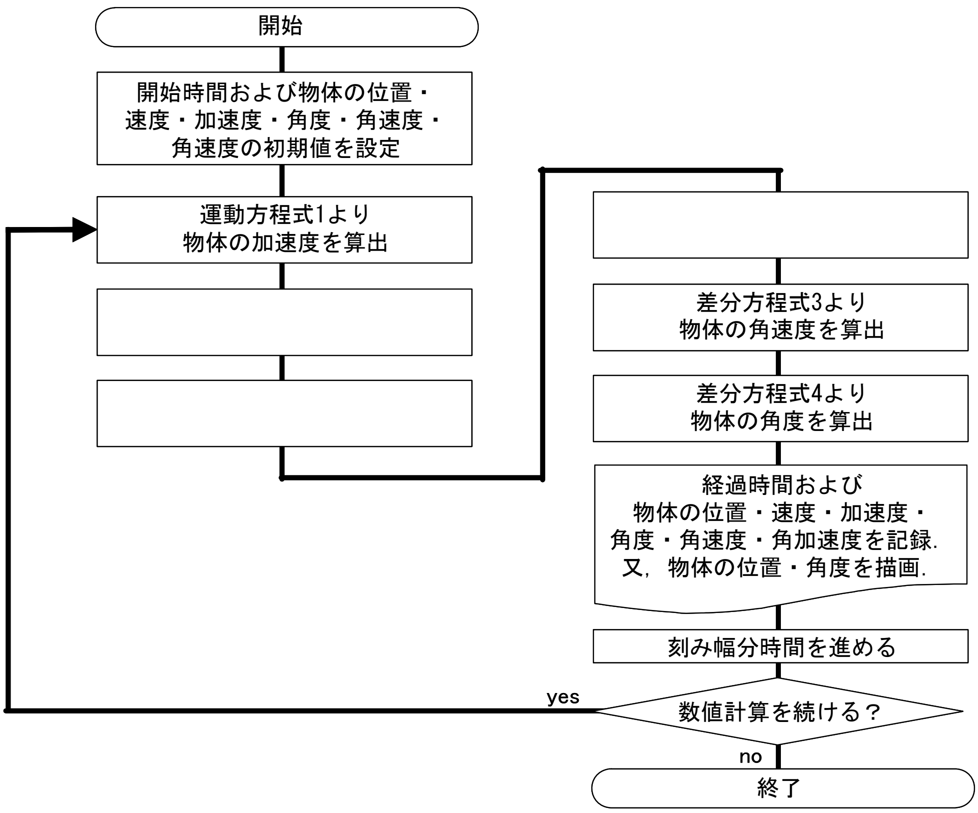
差分方程式２：　$x_n = x_{n-1} + \dot{x}_n * dt$

運動方程式２：

差分方程式３：　$\dot{\theta}_n = \dot{\theta}_{n-1} + \ddot{\theta}_n * dt$

差分方程式４：　$\theta_n = \theta_{n-1} + \dot{\theta}_n * dt$

<u>フローチャート</u>



2008 年 11 月 28 日